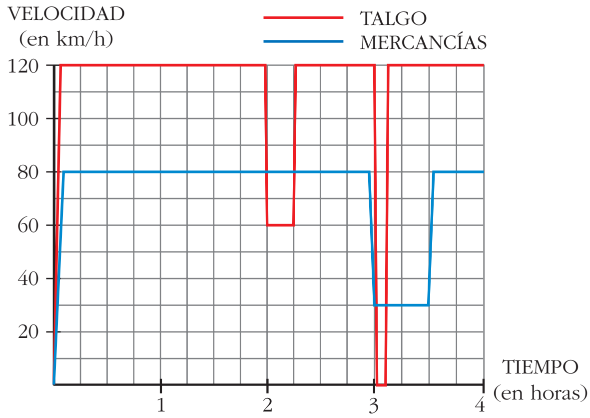
13 LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

REFLEXIONA Y RESUELVE

Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad:

¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante?

A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el Talgo se detiene durante breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio durante media hora.

■ **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

a) **El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?**

b) **De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?**

c) **El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?**

d) **¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?**

Haciendo los cálculos anteriores, podrás comprobar que:

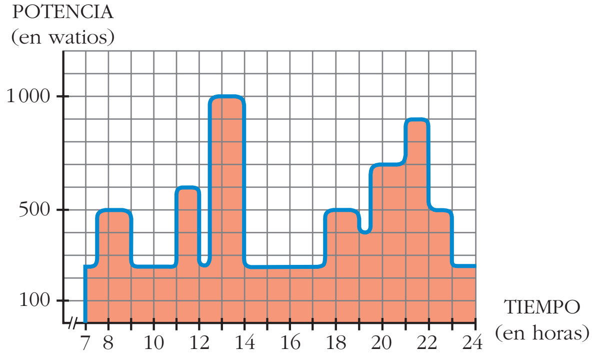
Ambos trenes recorren 240 km a velocidad normal. Reducen la velocidad en el mismo lugar y recorren, así, otros 15 km (puede ser debido a obras en la vía) y, a continuación, recupera cada cual su velocidad normal. (Es decir, el tren de mercancías no frena *cuando* el Talgo, pero sí *donde* el Talgo). Más adelante, el Talgo para en una estación.

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o azul. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

Consumo de energía eléctrica

La gráfica adjunta nos da la potencia eléctrica que hay en funcionamiento en una vivienda, a cada instante, entre las 7 de la mañana y las 12 de la noche.



El área bajo la curva es la energía consumida:

potencia × tiempo = energía

Un cuadradito equivale a 0,1 kWh.

- **¿Cuántos kWh se han consumido, aproximadamente, en esas 17 horas?**

1. **Halla gráficamente las siguientes integrales:**

a) $\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ **b)** $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

2. **Halla gráficamente las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{16-x^2}+4\right)dx$

b) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\left(4-\sqrt{16-x^2}\right)dx$

1. **Sea la función** $F(x)=\displaystyle\int_0^x \log(t^2+4)\,dt$. **Calcula** $F'(x)$.

2. **Calcula la siguiente integral:**

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \; dx$$

1. **Calcula:** $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\, dx$

2. **Calcula:** $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

1. **Halla el área comprendida entre la función** $y = x^3 - x^2 - 6x$ **y el eje** X**.**

2. **Halla el área comprendida entre las funciones** $y = x^4 + x^3$ **e** $y = x^4 + x^2 + 6x$.

1. **Calcula el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia** $y = \sqrt{25 - x^2}$ **alrededor del eje** X. **¿Qué límites de integración debes tomar?**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Integral definida

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

s2 **Calcula:** $\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx$

s3 **Halla el valor de la integral definida de la función** $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\ cos\ (2\pi x)$ **en el intervalo** $I = [0, 2]$**.**

Área entre $f(x)$, eje OX, $x = a$ y $x = b$

4 **Calcula el área comprendida entre la curva** $y = 3x^2 - x + 1$**, el eje** X **y las rectas** $x = 0$ **y** $x = 4$**.**

5 **Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre $x = -1$ y $x = 1$.**

6 **Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.**

s7 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = (x - 1)^2 (x + 1)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.**

s8 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.**

Área entre dos curvas

9 **Halla, en cada caso, el área comprendida entre:**

a) $y = x^2 - 5$ **e** $y = -x^2 + 5$ **b)** $y = x^2$ **e** $y^2 = x$

s10 **Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:**

a) $y = 4 - x^2;\ y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2;\ y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x;\ y = x$

d) $y = x(x - 1)(x - 2);\ y = 0$

e) $y = x^2;\ y = 1$

f) $y = x^2 - 2x;\ y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4;\ y = 2x - 7$

s11 **Dibuja y halla el área de la región limitada por la curva $y = x(3 - x)$ y la recta $y = 2x - 2$.**

= 2.

12 **Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.**

13 **Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que corta al eje de abscisas.**

14 **Dadas la hipérbola $xy = 6$ y la recta $x + y - 7 = 0$, calcula el área comprendida entre ellas.**

15 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

Volumen

16 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos siguientes:**

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ **entre** $x = -1$ **y** $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ **entre** $x = 0$ **y** $x = 1$

17 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ **b)** $y^2 = 4x$, $x = 4$

PARA RESOLVER

s18 **Halla el área comprendida entre la curva** $y = \dfrac{4}{9 + 2x^2}$**, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.**

s19 **Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuja las dos gráficas en un mismo plano y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.

s20 **Se considera la función:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } \ 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$$

s21 **Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.**

s22 **Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

s23 **Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.**

s24 **Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.**

s25 **De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$.**

Calcula a, b, c y d.

s26 **Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de k de forma que el área de la región limitada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y la curva $f(x)$ quede dividida por el eje X en dos partes con igual área.**

s27 **Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.**

s28 **Sean $y = ax^2$ e $y = ax + a$ las ecuaciones de una parábola p y de una recta r, respectivamente. Demuestra las siguientes afirmaciones:**

a) Los puntos de corte de p y r no dependen del valor de a.

b) Si se duplica el valor de a, también se duplica el área encerrada entre p y r.

s29 **Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.**

30 **Calcula el área limitada por $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo a y b las abscisas del máximo y el mínimo de f.**

31 **Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.**

32 **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcula el área de S y el volumen de la figura engendrada por S al girar alrededor del eje X.**

33 **Halla el área de la región del plano limitada por la curva $y = ln\ x$, la recta $y = 2$ y los ejes de coordenadas.**

34 **Calcula el área de la figura limitada por las curvas que se dan en los siguientes casos:**

a) $y = 2 - x^2, \; y = |x|$

b) $xy + 8 = 0, \; y = x^2, \; y = 1$

c) $y = sen\, x, \; y = cos\, x, \; x = 0$

35 **Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.**

36 **Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.**

37 **Dada la función $y = \dfrac{2}{x+1}$, calcula el valor de a para que el área limitada por esa curva y las rectas $x = 0$ y $x = a$ sea igual a 2.**

38 **Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.**

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

39 **Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.**

40 **Dadas $y = -x^2 + 1$ y la recta $y = a$, $a < 0$, determina el valor de a de modo que el área entre la curva y la recta sea $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ u^2.**

41 **Halla el área de la porción de plano encerrada entre las curvas** $y = sen\ x$ **e** $y = sen\ 2x$ **para valores de** x **en el intervalo** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$**.**

42 **Halla el área comprendida entre la curva $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

43 **Calcula el área limitada por la hipérbola $xy = 1$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 1 y 4.**

44 **La región limitada por la recta $y = x - 3$, la parábola $y = (x - 5)^2$ y el eje *OX* gira alrededor del eje *OX*. Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera.**

45 **Halla el volumen del cuerpo engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje OX.**

46 **Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las funciones $y = \frac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**

47 **Calcula el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ cuando $x \in [-4, 4]$.**

48 **Halla el volumen engendrado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ al girar alrededor de OX.**

49 **Obtén la familia de curvas en las que la pendiente de la tangente es $f(x) = x\, e^{2x}$. ¿Cuál de esas curvas pasa por el punto $A(0, 2)$?**

50 **Expresa la función de posición de un móvil sabiendo que su aceleración es constante de 8 cm/s^2, que su velocidad es 0 cuando $t = 3$ y que está en el origen a los 11 segundos.**

51 **Un móvil se desplaza en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración de 2 m/s^2 y con velocidad inicial $v_0 = 1$ m/s. Calcula y compara las distancias recorridas entre $t = 0$ y $t = 2$ y entre $t = 2$ y $t = 3$.**

•

•

CUESTIONES TEÓRICAS

52 **Calcula la derivada de la función dada por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t \, dt$ de dos formas:**

a) Obteniendo de forma explícita $F(x)$ y, después, derivando.

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

53 **Halla la derivada de las funciones que se dan en los siguientes apartados:**

a) $F(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt$

b) $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t) \, dt$

c) $F(x) = \int_4^x \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} \, dt$

d) $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (1 + t) \, dt$

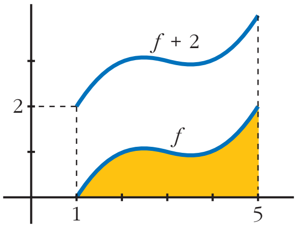
54 **Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:**

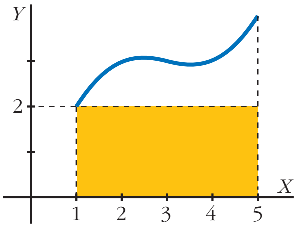
$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) \, dt$$

55 Sabemos que $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1 + x)$, siendo continua en $\mathbb{R}$. Calcula $f(2)$.

56 Sea $F(x) = \int_1^x \cos^2 t\,dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.

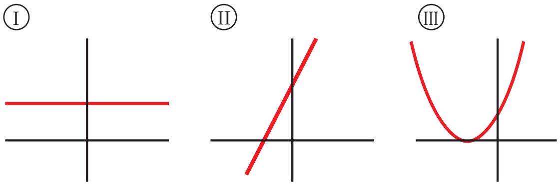
57 Sabemos que el área limitada por una función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a 6. ¿Cuánto aumentará el área si trasladamos 2 unidades hacia arriba la función f?



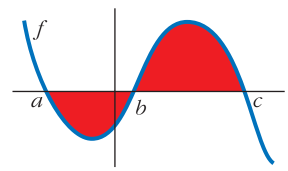


58 Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en cada uno de sus puntos. ¿Por qué?

59 La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.



60 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**



a) $\int_a^c f$ **b)** $\left|\int_a^c f\right|$ **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$ **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$

61 **Justifica la siguiente afirmación:**

Si una función f no corta al eje X, cualquier primitiva de ella no puede tener máximos ni mínimos.

62 **Dada la función $y = x^2$, halla el punto $c \in [0, 2]$ tal que el área $\int_0^2 x^2\, dx$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$. Es decir, $2f(c) = \int_0^2 x^2\, dx$.**

¿Qué teorema asegura la existencia de c?

63 **Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ tal que $F(x) = \int_0^x ln(2 + t)\, dt$.**

Analiza si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:

a) $F(0) = ln\ 2$

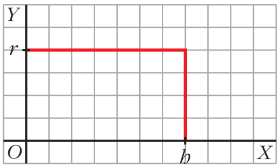
b) $F'(x) = \dfrac{1}{2 + x},\quad x \geq 0$

c) **F es creciente en su dominio.**

PARA PROFUNDIZAR

64 **Deduce por integración el volumen del cilindro de radio r y altura h.**

☛ ***Haz girar alrededor de OX el rectángulo limitado por la recta $y = r$ entre $x = 0$ y $x =$ h.***



65 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el volumen de la esfera es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.**

☛ ***La esfera se engendra al girar la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje X.***

Página 385

66 **Demuestra que el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **es:**

a) $\dfrac{4}{3}\pi\, a\, b^2$ **si gira alrededor de** OX.

b) $\dfrac{4}{3}\pi\, a^2\, b$ **si gira alrededor de** OY.

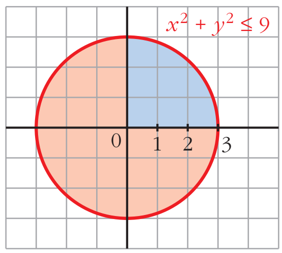
67 **Determina la función** $y = f(x)$ **sabiendo que su gráfica pasa por el punto** $P(1, 1)$, **que la tangente en** P **es paralela a la recta** $3x + 3y - 1 = 0$ **y que** $f''(x) = x$.

68 **Determina el valor del parámetro $a > 0$ de tal manera que el área de la región del plano limitada por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = a(x + 2)^2 - (x + 2)^3$ valga 108.**

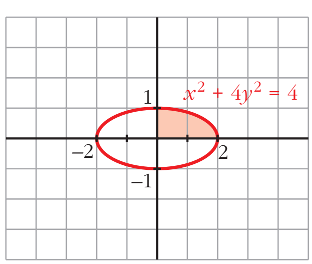
69 **Halla la ecuación de una parábola de eje vertical, tangente en el origen de coordenadas a una recta de pendiente 4 y que delimita con el eje X un recinto de base [0, 3] y área 9.**

y

70 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área del círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ es 9π.**

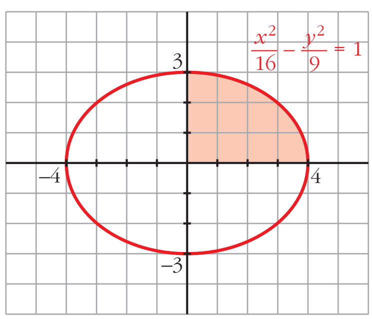


71 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es 2π.**

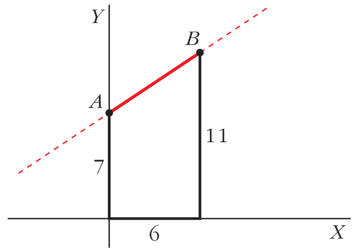


•

72 **Calcula el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.**



73 **a)** **Halla el volumen del tronco de cono de radios 7 cm y 11 cm y altura 6 cm que se obtiene al hacer girar el segmento *AB* alrededor de *OX*.**



☛ ***Halla la ecuación de la recta AB.***

b) **Obtén la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ que nos da el volumen de un tronco de cono de radios r_1, r_2 y altura h.**

AUTOEVALUACIÓN

1. **Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, calcula:**

a) El área encerrada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

b) El área de cada uno de los dos recintos comprendidos entre las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x + 3$.

2. **Calcula el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$, el eje OY y la recta tangente a f en $x = 3$.**

3. **Halla el área comprendida entre la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ y el eje OX.**

4. **Calcula: $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1| \, dx$**

5. **Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ y las rectas $y = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.**

6. **Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$.**

7. **Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $f(x) = |x^2 - 4|$ y las rectas $x = -1$, $x = 3$ e $y = 0$.**

8. **Dada la función $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$ con $x \geq 1$:**

a) Calcula $F'(e)$.

b) ¿Tiene F puntos de inflexión?

Justifica tu respuesta.

9. **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX la función $f(x) = x + 2$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**